ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐÁP ÁN MÔN TOÁN CAO CẤP A1
Ngày thi: 11/08/2018

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>I</td><td>

$z^3 - z^2 + \left(2 - 2\sqrt{3}i\right)z - 2 + 2\sqrt{3}i = 0 \Leftrightarrow (z-1)\left(z^2 + 2 - 2\sqrt{3}i\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1 = 1 \\ z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \end{array}\right.$

$z_1^{2019} + z_2^{2019} + z_3^{2019} = 1 + 2^{2019}\left(\cos(673\pi) + i\sin(673\pi)\right)$

$+2^{2019}\left(\cos(2692\pi) + i\sin(2692\pi)\right)$

$= 1 + 2^{2019}(-1) + 2^{2019} = 1$

</td><td>0.75

0.25</td></tr>
<tr><td>II</td><td>

$x(t) = 3 + 2\cos t, \mathrm{y} = 1 + 2\sin t,\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Ta có

$x'(t) = -2\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \Leftrightarrow t = \pi.$

$y'(t) = 2\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \vee t = \frac{3\pi}{2}.$

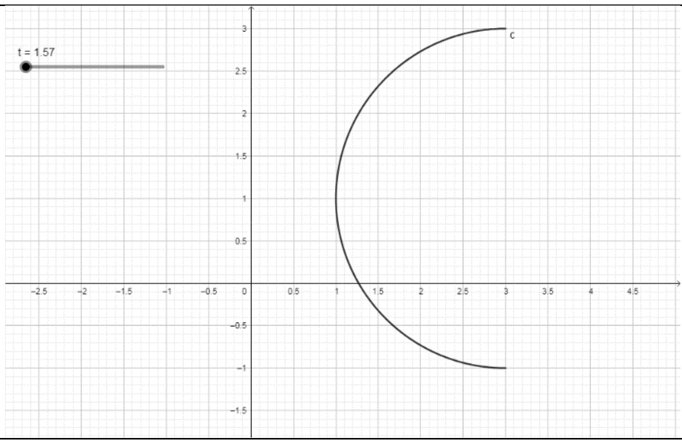
$y'_x = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\cot t; y'_x = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \vee t = \frac{3\pi}{2}; \mathrm{y}'_x = \infty \Leftrightarrow t = \pi.$

Bảng biến thiên

<table>
<tr><td>t</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td></td><td>π</td><td></td><td>$\frac{3\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>$x'(t)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$x(t)$</td><td>3</td><td>↘</td><td>1</td><td>↗</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$y'(t)$</td><td>0</td><td>+</td><td>||</td><td>+</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$y(t)$</td><td>3</td><td>↘</td><td>1</td><td>↘</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>$y'(x)$</td><td>0</td><td></td><td>∞</td><td></td><td>0</td></tr>
</table>

</td><td>0.5

0.25</td></tr>
</table>

		0.25
III-1	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = m-1;\ f(0) = m-1$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(x^2+1)+\tan^2(mx)-\sin^3(2x)}{(x+1)(e^{2x}-1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+m^2x^2-8x^3}{(x+1)2x}$ $= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(m^2+1)x^2}{2x} = 0$ Hàm $f(x)$ liên tục tại 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \text{m}-1=0 \Leftrightarrow m=1$.	0.25 0.25 0.25
III-2	Với $m=1$: $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x^2+1)+\tan^2(x)-\sin^3(2x)}{x(x+1)(e^{2x}-1)}$ $= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2-(2x)^3}{x(x+1)2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{2x^2} = 1$. $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x} = 1$ Vì $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$ nên hàm số có đạo hàm tại $x=0$. Vậy $f(x)$ khả vi tại $x=0$.	0.25 0.25 0.25
IV	$f(\text{x}) = \ln(x^2-2x+5) = \ln\left(4+(x-1)^2\right) = \ln 4 + \ln\left(1+\dfrac{(x-1)^2}{4}\right)$ Đặt $X = \dfrac{(x-1)^2}{4}$, khi đó chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ là $f(x) = \ln 4 + \ln(1+X) = \ln 4 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{X^n}{n} = \ln 4 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n4^n}(x-1)^{2n}$ $= \ln 4 + \dfrac{1}{4}(x-1)^2 - \dfrac{1}{2.4^2}(x-1)^4 + \dfrac{1}{3.4^3}(x-1)^6 - \ldots \dfrac{(-1)^{n-1}}{n4^n}(x-1)^{2n} + \ldots$	0.5 0.5
V-1	$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^3 x - x\tan x)\cos x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos x dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx = I_1 - I_2$ Đặt $u = \sin x, du = \cos x dx$	0.25

	$I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^3 du = \frac{1}{4}u^4\Big\|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{16}$	0.25
	$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x dx = -x\cos x\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = -\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	0.25
	Vậy $I = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0.25
V-2	$J = \int_1^{+\infty} \frac{x^2+\arctan(x)+1}{\sqrt{(x-1)(x^7+2)}}dx = \int_1^2 \frac{x^2+\arctan(x)+1}{\sqrt{(x-1)(x^7+2)}}dx + \int_2^{+\infty} \frac{x^2+\arctan(x)+1}{\sqrt{(x-1)(x^7+2)}}dx$ $= J_1 + J_2$	0.25
	Khi $x \to 1^+$: $f(x) = \frac{x^2+\arctan(x)-1}{\sqrt{(x-1)(x^7+2)}} \sim \frac{-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{3}(x-1)^{\frac{1}{2}}} = g(x)$ Mà $\int_1^2 g(x)dx$ hội tụ nên J_1 hội tụ.	0.25
	Khi $x \to +\infty$: $f(x) = \frac{x^2+\arctan(x)-1}{\sqrt{(x-1)(x^7+2)}} \sim \frac{x^2}{x^{8/2}} = \frac{1}{x^2} = g(x)$ Mà $\int_2^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ nên J_2 hội tụ.	0.25
	Vậy J hội tụ.	0.25
VI-1	Đặt $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n^2+n}$, xét thấy $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{(2n-1)\frac{n+1}{2n-1}} = e^{\frac{1}{2}} > 1$	0.75
	Vậy chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn Cauchy.	0.25
VI-2	Đặt $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n X^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(n+1)^2}(x-2)^n$ với $a_n = \frac{(-1)^n}{3^n(n+1)^2}, X = x-2$ $\rho = \lim_{n\to+\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n(n+1)^2}{3^{n+1}(n+2)^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$, khi đó miền hội tụ của X là $(-3,3)$ hay miền hội tụ của x là $(-1,5)$.	0.5
	Tại $X=-3$: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n X^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n}3^n}{3^n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$: chuỗi hội tụ .	0.5
	Tại $X=3$: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n X^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{3^n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz. Vậy miền hội tụ của chuỗi ban đầu là $[-1,5]$.	0.5

VII	$f(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{khi } -\pi \le x < 0 \\ x+1 & ,\text{khi } 0 \le x < \pi \end{cases}$ Khai triển Fourier của hàm $f(x)$ với chu kỳ $T = 2\pi$ là $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$, trong đó $a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi}(x+1)dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\pi + \frac{1}{2}\pi^2 + \pi\right] = \frac{\pi+4}{2}$ $a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \cos nxdx + \int_{0}^{\pi}(x+1)\cos nxdx\right]$ $= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\Big\|_{-\pi}^{0} + \frac{x+1}{n}\sin nx\Big\|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big\|_{0}^{\pi}\right] = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$ $b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \sin nxdx + \int_{0}^{\pi}(x+1)\sin nxdx\right]$ $= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n}\cos nx\Big\|_{-\pi}^{0} - \frac{x+1}{n}\cos nx\Big\|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big\|_{0}^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n} - \frac{(\pi+1)(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right]$ $= \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ Vậy khai triển Fourier của $f(x)$ tại $x \neq (2k+1)\pi$ là $f(x) = \frac{\pi+4}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$ Tại $x = (2k+1)\pi$, $S(x) = \frac{\pi+2}{2}$.	0.25 0.25 0.25 0.25